

حل مسئله‌های احتمال

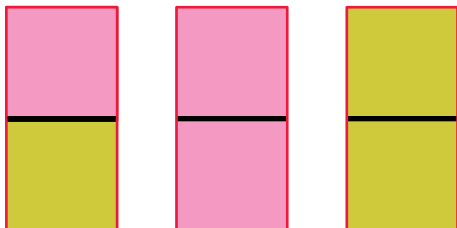
(شرطی-بیز)



با استفاده از نسبت مساحت‌ها

اشاره

مفاهیم و پرسش‌های احتمال و درک درست آن‌ها برای اغلب مردم دشوار است. نگاه اکثر دانش‌آموزان به مطالب مربوط به احتمال، با نوعی ترس و ناامیدی همراه است. برای کم کردن این احساس نامطلوب و در نتیجه یادگیری بهتر و عمیق‌تر دانش‌آموزان، به کار بردن روش‌های ساده برای آموزش (حداقل در شروع) می‌تواند مؤثر باشد. در کتاب «آمار و احتمال» پایه یازدهم ریاضی، بخش‌های مربوط به «احتمال شرطی، ضرب احتمال‌ها، احتمال کل و قانون بیز» اهمیت زیادی دارند. در ادامه چند مسئله از کتاب آمار و احتمال ذکر می‌شود. هدف این است که با روش ساده‌ای مثل رسم شکل و نسبت مساحت‌های آن‌ها بتوانیم مسئله‌های مزبور را حل کنیم.



۱. صفحه ۵۸، مثال: سه کارت داریم. دو روی کارت اول سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و یک روی کارت سوم سبز و روی دیگرش قرمز است. کارتی به تصادف برمی‌داریم و می‌بینیم یک روی آن سبز است (روی دیگر را نمی‌بینیم). احتمال اینکه هر دو رو سبز باشند، چقدر است؟

هر مربع نشان دهنده یک روی کارت است. ما یکی از سه مربع سبز را دیده‌ایم. مطلوب مسئله دو مربع سمت راست هستند؛ پس:

$$\text{احتمال} = \frac{2}{3}$$

سؤال بعدی مربوط به احتمال کل است:

۲. صفحه ۶۵، تمرین ۶: جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهی‌نامه تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهی‌نامه داشته باشد، چقدر است؟

حل با قانون احتمال کل: (حل مسئله ۲)

A: داشتن گواهی‌نامه

B: مرد بودن

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

$$P(A) = 0/45 \times 0/7 + 0/55 \times 0/2 = 0/425$$

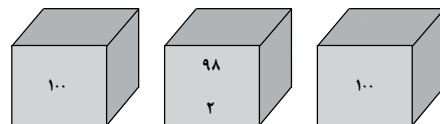
حل با رسم شکل:



$$\text{احتمال} = \frac{\text{مساحت سبز}}{\text{مساحت کل}} = \frac{20 \times 55 + 70 \times 45}{10000} = 0/425$$

و حالا چند مسئله از قانون بیز که در کتاب مطرح شده است:

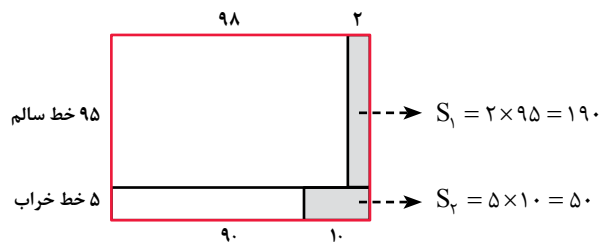
۳. صفحه ۶۲، مثال: سه صندوق سیب هر کدام شامل ۱۰۰ سیب داریم. سیب‌های صندوق اول سبز و سیب‌های صندوق دوم قرمزند. صندوق سوم شامل ۲ سیب سبز و ۹۸ سیب قرمز است. صندوقی را به تصادف انتخاب می‌کنیم، یک سیب به تصادف برمی‌داریم و می‌بینیم سبز است. احتمال اینکه همه سیب‌های صندوق سبز باشند، چقدر است؟



سیب از قسمت‌های سبز برداشته شده است. احتمال اینکه از صندوق سمت چپ باشد، برابر است با:

$$\frac{100}{102} = 0/98$$

۴. صفحه ۶۳، مثال: در یک کارخانه شیر پاستوریزه وقتی خط تولید سالم است، تنها ۲ درصد از پاکت‌ها به‌طور کامل پر نمی‌شود. اما اگر خط تولید خراب باشد، این مقدار به ۱۰ درصد افزایش می‌یابد. می‌دانیم احتمال اینکه خط تولید خراب باشد، ۵ درصد است. به تصادف یک پاکت شیر را امتحان می‌کنیم و می‌بینیم کامل پر نشده است. احتمال خراب بودن خط تولید چقدر است؟



$$S_1 + S_2 = 240 \Rightarrow P = \frac{50}{240} = 0/208$$

۵. صفحه ۶۶، تمرین ۱۵: خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه‌خوان‌های یک مؤسسه انتشاراتی‌اند که به ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای را که به آن‌ها سپرده می‌شود، بی‌غلط تصحیح کنند به ترتیب ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده است، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد، چقدر است؟

	چمنی	برنا	اکبری	
۰/۱	S_1 ۰/۱	S_2 ۰/۰۵	S_3	۰/۱
	۰/۹۹	۰/۹۵		۰/۹
	۵۰	۳۰	۲۰	

قسمت‌های قرمز نشان دهنده غلط داشتن هستند.

پس برای پیدا کردن احتمال مساحت بخش مربوط به خانم

اکبری را بر مساحت کل قرمز تقسیم می‌کنیم:

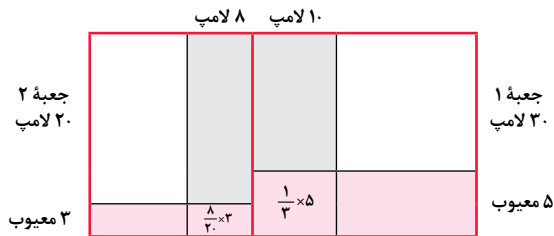
$$S_1 = 20 \times 0/1 = 2$$

$$S_2 = 30 \times 0/05 = 1/5$$

$$S_3 = 50 \times 0/99 = 0/5$$

$$P = \frac{S_1}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{2}{4} = 0/5$$

حل به روش رسم شکل:



مساحت بخش‌های هاشورخورده قرمز را به کل هاشورخورده تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{5}{3} + \frac{6}{5} = \frac{43}{15}$$

$$P = \frac{15}{18} = \frac{43}{270}$$

۸. فرض کنیم در مسئله قبل لامپی که در آخر برداشتیم، معیوب باشد. چقدر احتمال دارد این لامپ از جعبه اول باشد!

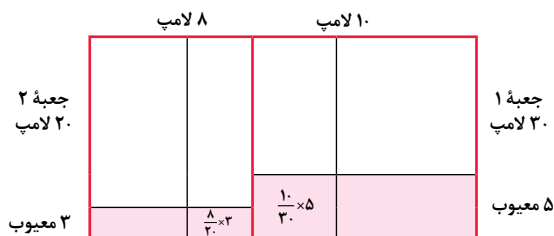
حل با فرمول بیز:

- A: معیوب بودن
- B_۱: از جعبه اول باشد.
- B_۲: از جعبه دوم باشد.

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \times P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)}$$

$$= \frac{\frac{10}{18} \times \frac{5}{30}}{\frac{10}{18} \times \frac{5}{30} + \frac{8}{18} \times \frac{3}{20}} = \frac{25}{43}$$

حل با رسم شکل:



$$\frac{6}{5} + \frac{5}{3} = \frac{43}{15}$$

$$P = \frac{15}{43} = \frac{25}{43}$$

حل با فرمول قانون بیز نیز دقیقاً همین مسیر را طی می‌کند؛ اما با زبانی ظاهراً متفاوت:

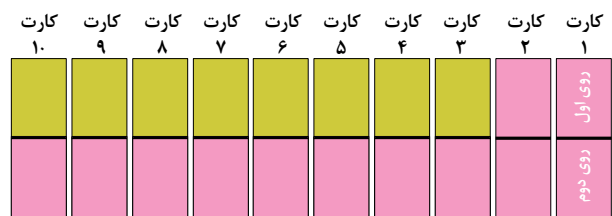
- پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم:
- B_۱: مسئول خانم اکبری باشد.
- B_۲: مسئول خانم برنا باشد.
- B_۳: مسئول خانم چمنی باشد.
- A: صفحه دارای غلط باشد.

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}$$

$$P(B_1|A) = \frac{0.20 \times 0.1}{0.20 \times 0.1 + 0.30 \times 0.5 + 0.50 \times 0.1} = 0.05$$

۶. صفحه ۶۲، مثال: دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز

و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی به تصادف انتخاب می‌کنیم و فقط یک رو آن را می‌بینیم که قرمز است. احتمال اینکه روی دیگر کارت نیز قرمز باشد، چقدر است؟



قرمز بودن روی دیگر کارت به این معنی است که روی دیده شده، یکی از مستطیل‌های قرمز هاشورخورده است. پس:

$$P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

۷. دو جعبه داریم که اولی شامل ۳۰ عدد لامپ است که از آن‌ها

۵ لامپ معیوب است. در جعبه دوم ۲۰ لامپ قرار داده‌ایم که ۳ تای آن‌ها معیوب‌اند. از جعبه اول ۱۰ لامپ و از دومی ۸ لامپ به تصادف برمی‌داریم و در جعبه جدیدی می‌گذاریم. سپس به تصادف لامپی از جعبه جدید برمی‌داریم. احتمال معیوب بودن این لامپ چقدر است؟

حل با فرمول احتمال کل:

- A: معیوب بودن
- B_۱: از جعبه اول باشد.
- B_۲: از جعبه دوم باشد.

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$= \frac{10}{18} \times \frac{5}{30} + \frac{8}{18} \times \frac{3}{20} = \frac{43}{270}$$

حل با شکل:

	سالم ۹۹۶	بیمار ۴	
۱۰ مثبت تست	S_1		۸۵
۹۰ منفی تست			
			۱۵

مساحت بخش هاشور خورده قرمز را به کل مساحت قرمز تقسیم می‌کنیم:

$$S_1 = 4 \times 85 = 340$$

$$S_2 = 10 \times 996 = 9960$$

$$P = \frac{S_1}{S_1 + S_2} = \frac{340}{340 + 9960} = 0.033$$

مسئله ۹: فرض کنیم از هر ۱۰۰۰ نفر، ۴ نفر به بیماری خاصی مبتلا می‌شوند. تست‌های آزمایشگاهی بیماری افراد مبتلا را تا ۸۵ درصد و سالم بودن افراد سالم را تا ۹۰ درصد درست تشخیص می‌دهند. نتیجه آزمایش فردی که به تصادف انتخاب شده، مثبت اعلام شده است. احتمال بیمار بودنش چقدر است؟

حل با فرمول:

A: بیمار بودن

B: نتیجه آزمایش مثبت

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(A) \times P(B|A) + P(A') \times P(B|A')$$

$$= 0.004 \times 0.85 + 0.996 \times 0.9$$

$$= 0.903$$

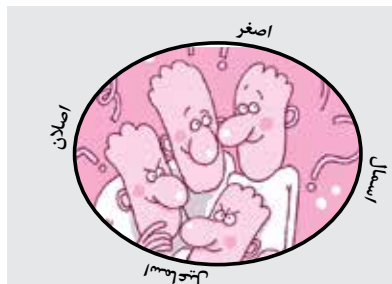
$$P(A|B) = \frac{0.004 \times 0.85}{0.903} = 0.0037$$

ادب ریاضی

دو معمای منطقی

- اسماعیل سمت چپ اسمال نشسته است.
- اصغر سمت چپ بقال نشسته است.
- اصلان که مقابل اسمال است نانوا نیست.
- اصغر چه دکانی دارد؟

۱۰۰ سرگرمی منطقی
پیر پرلوکن
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



در نتیجه، اسمال بقال است، اصلان سیگارفروش، و اصغر نانوا.

۱. در استخری یک قایق لاستیکی بادشده انداخته‌ایم. کدام عمل سطح آب را بالاتر می‌آورد: انداختن سکه‌ای درون قایق، یا انداختن سکه‌ای در آب؟

۲. اسماعیل قصاب رئیس کمیته مغازه‌داران است. این کمیته شامل بقال، نانوا، و سیگارفروش نیز می‌شود. تمام آن‌ها دور میزی نشسته‌اند.

جواب ۱. انداختن سکه در قایق، زیرا سکه در آب به اندازه حجمش آب را تغییر می‌دهد، در حالی که در قایق به اندازه آب هم‌وزنش آن را جابه‌جا می‌کند. از آنجا که سکه فلزی از آب سنگین‌تر است، سکه بیشتر از آب هم‌حجمش وزن دارد.

جواب ۲. با قرار دادن اسماعیل در صندلی ته میز، چهار شخص مذکور می‌توانند تنها به این طریق بنشینند: